第 5 节 三角函数图象性质综合问题（★★★☆）

强化训练

1.（2018·北京卷·★★）设 $f(x)=\cos(\omega x-\dfrac{\pi}{6})(\omega>0)$，若 $f(x)\le f(\dfrac{\pi}{4})$ 对任意实数 x 都成立，则 ω 的最小值为_____.

答案：$\dfrac{2}{3}$

解析：要求 ω 的最小值，得先把 ω 表示出来，可用 $f(\dfrac{\pi}{4})$ 为最大值来表示，

$f(x)\le f(\dfrac{\pi}{4})$ 恒成立 $\Rightarrow f(\dfrac{\pi}{4})$ 是 $f(x)$ 的最大值，所以 $f(\dfrac{\pi}{4})=\cos(\dfrac{\pi}{4}\omega-\dfrac{\pi}{6})=1$，

从而 $\dfrac{\pi}{4}\omega-\dfrac{\pi}{6}=2k\pi$，故 $\omega=8k+\dfrac{2}{3}(k\in\mathbf{Z})$，又 $\omega>0$，所以 $\omega_{\min}=\dfrac{2}{3}$.

2.（★★★）已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+2$，则 $f(\dfrac{\pi}{8})+f(\dfrac{2\pi}{8})+\cdots+f(\dfrac{13\pi}{8})=$（　　）

（A）0　（B）10　（C）16　（D）26

答案：D

解析：逐个代入计算较麻烦，但可发现 $\dfrac{\pi}{8}$ 和 $\dfrac{13\pi}{8}$，$\dfrac{2\pi}{8}$ 和 $\dfrac{12\pi}{8}$，…，$\dfrac{6\pi}{8}$ 和 $\dfrac{8\pi}{8}$ 两两关于 $\dfrac{7\pi}{8}$ 对称，故猜想 $\dfrac{7\pi}{8}$ 可能与 $f(x)$ 的对称性有关，我们先验证这一猜想，

因为 $f(\dfrac{7\pi}{8})=\sqrt{2}\sin(2\times\dfrac{7\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4})+2=\sqrt{2}\sin 2\pi+2=2$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $B(\dfrac{7\pi}{8},2)$ 对称，

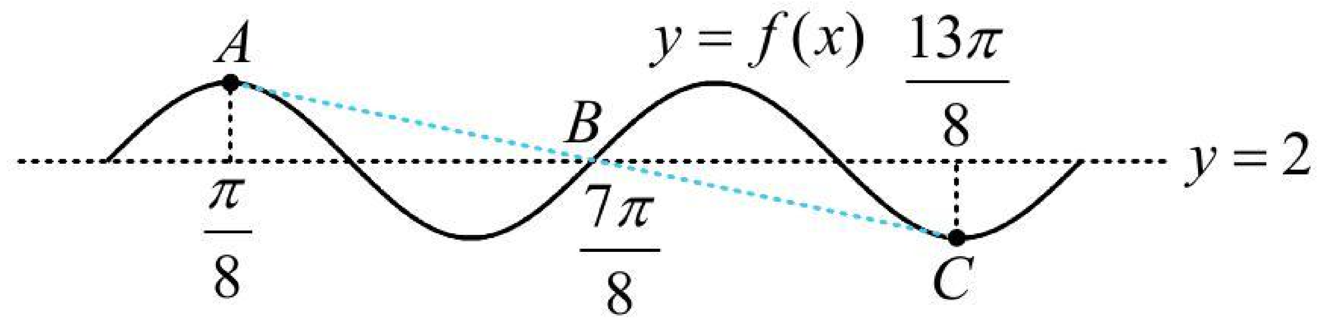
既然 B 是对称中心，那么其它点必定也两两关于该点对称，可画图来看看，

如图，$A(\dfrac{\pi}{8},f(\dfrac{\pi}{8}))$ 和 $C(\dfrac{13\pi}{8},f(\dfrac{13\pi}{8}))$ 关于 B 对称，

所以 $\dfrac{f(\dfrac{\pi}{8})+f(\dfrac{13\pi}{8})}{2}=f(\dfrac{7\pi}{8})$，故 $f(\dfrac{\pi}{8})+f(\dfrac{13\pi}{8})=2f(\dfrac{7\pi}{8})=4$，

同理，$f(\dfrac{2\pi}{8})+f(\dfrac{12\pi}{8})=f(\dfrac{3\pi}{8})+f(\dfrac{11\pi}{8})=\cdots=f(\dfrac{6\pi}{8})+f(\dfrac{8\pi}{8})=4$，

所以 $f(\dfrac{\pi}{8})+f(\dfrac{2\pi}{8})+\cdots+f(\dfrac{13\pi}{8})=4\times6+2=26$.



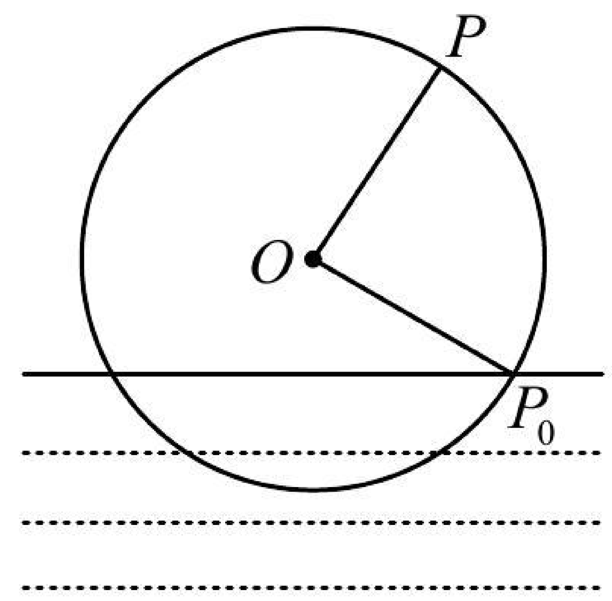
3．（2022 • 河南确山月考 • ★★★）一半径为4.8m的水轮如图所示，水轮圆心O距离水面2.4m，已知水轮每60s逆时针转动一圈，如果当水轮上点P从水中浮现时（图中点P_0）开始计时，则（　　）

（A）点P离水面的距离d（单位：m）与时间t（单位：s）的函数解析式为$d=4.8\sin(\dfrac{\pi}{30}t-\dfrac{\pi}{6})-2.4$

（B）点P第一次到达最高点需要10s

（C）在水轮转动的一圈内，点P离水面的高度不低于4.8m共有10s时间

（D）当水轮转动50s时，点P在水面下方，距离水面2.4m



答案：D

解析：由题意，可设点P离水面的距离$d=A\sin(\omega t+\varphi)+B(A>0,\omega>0)$，

先由题干信息求出A、B、ω、φ，再判断选项，首先由最大、最小值求A和B，

因为水轮半径为4.8m，圆心O离水面2.4m，所以$d_{\max}=4.8+2.4=7.2$，$d_{\min}=2.4-4.8=-2.4$，

从而$\begin{cases}A+B=7.2\\-A+B=-2.4\end{cases}$，故$A=4.8$，$B=2.4$，

再由周期求ω，因为水轮每60s逆时针转动一圈，所以$T=60$，$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{30}$，

最后由初相位求φ，如图1，OA为水平线，$OC\perp P_0C$于C，$P_0C\,//\,OA$，由题意，$OC=2.4$，$OP_0=4.8$，

所以$\angle OP_0C=\dfrac{\pi}{6}$，从而$\angle AOP_0=\dfrac{\pi}{6}$，故以$OA$为始边，$OP_0$为终边的角可以为$-\dfrac{\pi}{6}$，

因为当$t=0$时，点P在P_0处，所以初相位$\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$，从而$d=4.8\sin(\dfrac{\pi}{30}t-\dfrac{\pi}{6})+2.4$，故A项错误；

B项，令$\dfrac{\pi}{30}t-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$可得$t=20$，所以点$P$第一次到达最高点需要20s，故B项错误；

C项，令$d\ge 4.8$可得$\sin(\dfrac{\pi}{30}t-\dfrac{\pi}{6})\ge\dfrac{1}{2}$，

只需在一个周期内解此不等式，不妨在$[0,60)$这个周期内来看，先将$\dfrac{\pi}{30}t-\dfrac{\pi}{6}$换元成$u$，

令$u=\dfrac{\pi}{30}t-\dfrac{\pi}{6}$，则$\sin u\ge\dfrac{1}{2}$，当$t\in[0,60)$时，$u\in[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6})$，如图2，

由图可知，$\sin u\ge\dfrac{1}{2}$在$[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6})$上的解集为$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$，所以$\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{30}t-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{5\pi}{6}$，故$10\le t\le 30$，

所以水轮转1圈，点P离水面的高度不低于4.8m共有20s时间，故C项错误；

D项，当$t=50$时，$d=4.8\sin(\dfrac{\pi}{30}\times 50-\dfrac{\pi}{6})+2.4=4.8\sin\dfrac{3\pi}{2}+2.4=-2.4$，故D项正确.

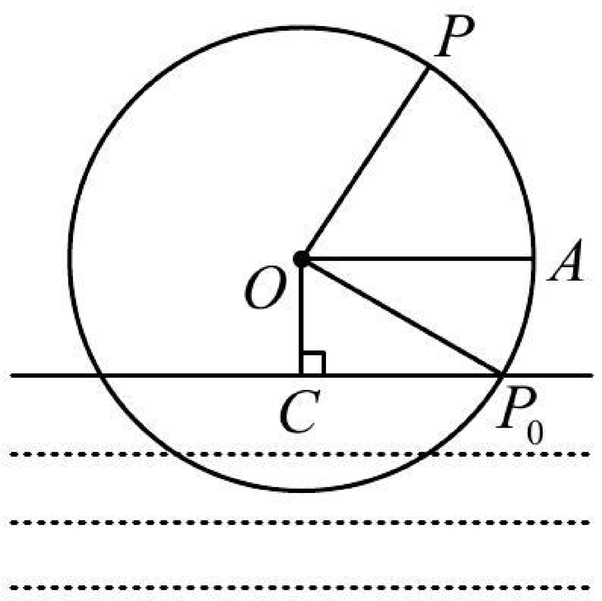


图1

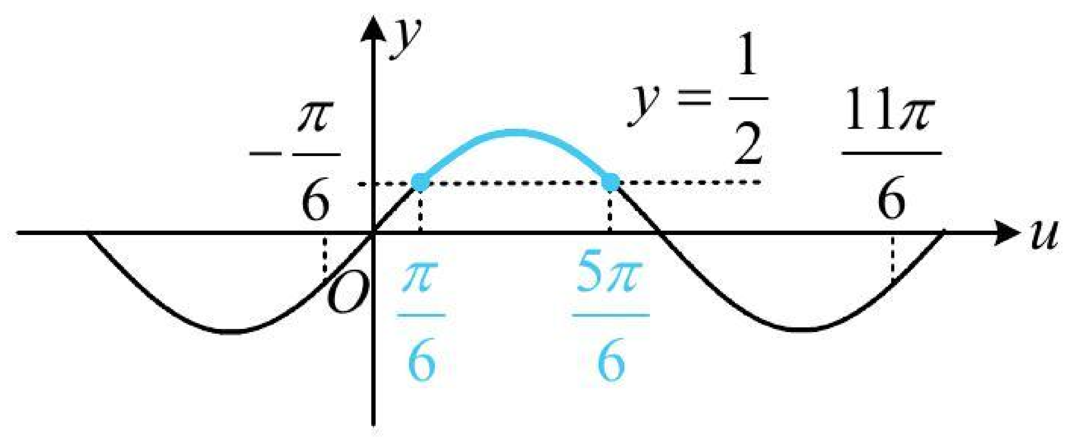


图2

4.（2020·新课标III卷·★★★）关于函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题：

① $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称；

② $f(x)$ 的图象关于原点对称；

③ $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称；

④ $f(x)$ 的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是_____.

答案：②③

解析：①项， $f(-x)=\sin(-x)+\dfrac{1}{\sin(-x)}=-\sin x-\dfrac{1}{\sin x}=-f(x)\Rightarrow f(x)$ 为奇函数，

所以 $f(x)$ 的图象关于原点对称，故①项错误，②项正确；

③项，这里要判断 $f(x)$ 是否关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，只需验证 $f(x)$ 是否满足 $f(\pi-x)=f(x)$，

$f(\pi-x)=\sin(\pi-x)+\dfrac{1}{\sin(\pi-x)}=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}=f(x)\Rightarrow f(x)$ 的图象关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，故③项正确；

④项，当 $\sin x<0$ 时， $f(x)<0$，所以 $f(x)$ 的最小值肯定不是 2，故④项错误.

5.（2022·山西二模·★★★★）下面关于函数 $f(x)=\sin 2x+2|\sin x|\cos x$ 的结论，其中错误的是（　　）

（A） $f(x)$ 的值域是 $[-2,2]$

（B） $f(x)$ 是周期函数

（C） $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

（D）当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时， $f(x)=0$

答案：C

解析：A 项，要求值域，得去绝对值，可通过周期把研究的范围缩窄，再讨论，下面先分析周期，

由题意， $f(x+2\pi)=\sin 2(x+2\pi)+2|\sin(x+2\pi)|\cos(x+2\pi)=\sin 2x+2|\sin x|\cos x=f(x)$，

所以 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，不妨在 $[0,2\pi)$ 这个周期内求值域，可通过讨论去绝对值，

当 $x\in[0,\pi]$ 时， $\sin x\ge 0$，所以 $f(x)=\sin 2x+2\sin x\cos x=\sin 2x+\sin 2x=2\sin 2x$，

因为 $0\le x\le\pi$，所以 $0\le 2x\le 2\pi$，从而 $-1\le\sin 2x\le 1$，故 $f(x)$ 的取值范围是 $[-2,2]$；

当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时， $\sin x<0$，所以 $f(x)=\sin 2x-2\sin x\cos x=\sin 2x-\sin 2x=0$；

故 $f(x)$ 在 $[0,2\pi)$ 上的值域是 $[-2,2]$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的值域也是 $[-2,2]$，

到此可判断出 A 项、B 项、D 项均正确；故答案选 C，C 项为什么错了？我们也来分析一下，

C 项，要判断 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是否为对称轴，只需看 $f(\pi-x)=f(x)$ 是否成立，

$f(\pi-x)=\sin 2(\pi-x)+2|\sin(\pi-x)|\cos(\pi-x)=\sin(2\pi-2x)+2|\sin x|(-\cos x)=-\sin 2x-2|\sin x|\cos x=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，故 C 项错误.